Statistiques à deux variables
Problème de recherche : la décharge du supercondensateur

Un supercondensateur alimente l'éclairage de secours d'un local technique lors d'une coupure de courant. Un technicien relève la tension u (en volts) à ses bornes, t secondes après le début de la coupure :

t (s)	0	10	20	30	40	50	60
u (V)	12,0	8,9	6,6	4,9	3,6	2,7	2,0

L'éclairage s'éteint lorsque la tension descend en dessous de 0,5 V.

La mission

1. Un stagiaire réalise un ajustement affine de u en fonction de t par la méthode des moindres carrés. Montrer que ce modèle n'est pas adapté.
2. Proposer un meilleur modèle à l'aide du changement de variable $z = \ln u$, et donner l'expression de u en fonction de t.
3. Au bout de combien de temps l'éclairage de secours s'éteindra-t-il ?

Pour aller plus loin

Les électriciens écrivent la tension sous la forme $u(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, où τ est la **constante de temps** du circuit. Estimer τ, et montrer qu'à l'instant $t = \tau$, la tension a perdu environ 63 % de sa valeur initiale.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. L'ajustement affine

À la calculatrice : $u \approx -0{,}162t + 10{,}68$ (coefficients arrondis). Ce modèle prévoit une tension nulle vers $t \approx 66$ s, puis négative : par exemple $u \approx -5{,}5$ V pour $t = 100$ s, ce qui est absurde pour un condensateur qui se décharge. De plus, le nuage de points n'est pas aligné : les écarts entre deux relevés successifs diminuent (3,1 ; 2,3 ; 1,7 ; …). **Le modèle affine n'est pas adapté.**

2. Le changement de variable

On calcule $z = \ln u$:

t	0	10	20	30	40	50	60
$z = \ln u$	2,485	2,186	1,887	1,589	1,281	0,993	0,693

Les points $(t\,;z)$ sont presque alignés (les valeurs de z baissent d'environ 0,3 tous les 10 s). Ajustement par les moindres carrés : $z \approx -0{,}0299t + 2{,}484$.
Comme $u = \mathrm{e}^z$: $u \approx \mathrm{e}^{2{,}484} \times \mathrm{e}^{-0{,}0299t}$, soit $\boldsymbol{u(t) \approx 12\,\mathrm{e}^{-0{,}03t}}$ ($\mathrm{e}^{2{,}484} \approx 11{,}99$).

3. L'extinction

$$12\,\mathrm{e}^{-0{,}03t} < 0{,}5 \iff \mathrm{e}^{-0{,}03t} < \frac{1}{24} \iff -0{,}03t < \ln\frac{1}{24} \iff t > \frac{\ln 24}{0{,}03} \approx 106 \text{ s.}$$

L'éclairage s'éteint au bout de 106 secondes environ, soit 1 min 46 s. (Avec les coefficients non arrondis, on trouve aussi environ 106 s.)

Pour aller plus loin

Par identification : $\frac{1}{\tau} = 0{,}03$, donc $\tau \approx 33$ s. À $t = \tau$: $u(\tau) = U_0\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37\,U_0$: la tension a perdu environ 63 % de sa valeur initiale, et ce quelle que soit la valeur de U_0.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Nuage de points ; ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
— Changement de variable $z = \ln u$ pour se ramener à un ajustement affine.