Statistiques à deux variables
Problème de recherche : mesurer g avec un pendule

On fait osciller une petite masse accrochée à un fil de longueur L (en mètres) et on mesure la période T (en secondes) des oscillations :

L (m)	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
T (s)	0,90	1,27	1,55	1,80	2,01

Pour de petites oscillations, la physique prévoit que $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, où g est l'intensité de la pesanteur (en m/s^2).

La mission

1. Un élève réalise un ajustement affine de T en fonction de L. Il l'utilise pour prévoir la période d'un pendule de 4 m. Pourquoi ce modèle n'est-il pas adapté ?
2. Proposer un changement de variable qui permet un ajustement affine pertinent. Déterminer la droite d'ajustement correspondante.
3. En déduire une estimation de g.

Pour aller plus loin

En 1790, Talleyrand proposa de définir le mètre comme la longueur du « pendule battant la seconde », c'est-à-dire de période $T = 2$ s. Avec ces mesures, quelle serait cette longueur ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. L'ajustement de T en fonction de L

La calculatrice donne $T \approx 1{,}375L + 0{,}681$, qui prévoit $T \approx 6{,}18$ s pour $L = 4$ m. Or la formule physique donne $2\pi\sqrt{4/9{,}81} \approx 4{,}01$ s. Le nuage $(L\,;T)$ est légèrement courbé (l'accroissement de T diminue : +0,37, +0,28, +0,25, +0,21), et une droite ne peut pas être prolongée loin des mesures. De plus, elle ne donne pas $T = 0$ pour $L = 0$.

2. Changement de variable

$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$: on pose $Y = T^2$.

L	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$Y = T^2$	0,81	1,613	2,403	3,24	4,040

Le nuage $(L\,;Y)$ est presque parfaitement aligné. La droite d'ajustement est $Y \approx 4{,}044L - 0{,}005$ (ordonnée à l'origine quasi nulle, conforme à la formule).
Avec ce modèle, pour $L = 4$: $Y \approx 16{,}17$ et $T \approx 4{,}02$ s, très proche de la valeur théorique.

3. Estimation de g

$\frac{4\pi^2}{g} \approx 4{,}044$ donc $g \approx \frac{4\pi^2}{4{,}044} \approx 9{,}76$ m/s^2. La valeur admise en France est d'environ 9,81 m/s^2 : l'écart est inférieur à 1 %.

Pour aller plus loin

$T = 2$ donne $Y = 4$, et $4{,}044L - 0{,}005 = 4$ donne $L \approx 0{,}990$ m. Avec $g = 9{,}81$, la formule donne $L = \frac{9{,}81 \times 4}{4\pi^2} \approx 0{,}994$ m : le « pendule battant la seconde » mesure presque exactement un mètre. L'Académie des sciences choisit finalement, en 1791, de définir le mètre à partir de la longueur du méridien terrestre, notamment parce que g varie selon le lieu.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
- Changement de variable pour se ramener à un ajustement affine.
- Prévision à l'aide d'un ajustement.