Suites arithmétiques et géométriques
Problème de recherche : la pompe à vide qui fuit

Une enceinte contient de l'air à la pression atmosphérique $p_0 = 1013$ hPa. Une pompe à vide fonctionne par cycles : à chaque cycle, elle retire 10 % de l'air contenu dans l'enceinte, ce qui diminue la pression de 10 %. On veut descendre sous 10 hPa.

La mission

1. On suppose d'abord l'enceinte parfaitement étanche. Combien de cycles faut-il pour atteindre l'objectif ?
2. En réalité, un joint fuit : pendant chaque cycle, de l'air entre et la pression augmente de 2 hPa. La pression p_n après n cycles vérifie donc $p_{n+1} = 0{,}9\,p_n + 2$. On pose $v_n = p_n - 20$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis exprimer p_n en fonction de n.
3. Avec ce joint, l'objectif peut-il être atteint ? Combien de cycles faut-il pour descendre sous 25 hPa ?

Pour aller plus loin

On change le joint. On note f l'augmentation de pression (en hPa) due à la fuite à chaque cycle. Quelles valeurs de f permettent d'atteindre l'objectif de 10 hPa ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Sans fuite

$p_n = 1\,013 \times 0{,}9^n$. À la calculatrice : $p_{43} \approx 10{,}9$ et $p_{44} \approx 9{,}8$. Il faut **44 cycles**.

2. Avec la fuite

$v_{n+1} = p_{n+1} - 20 = 0{,}9p_n + 2 - 20 = 0{,}9p_n - 18 = 0{,}9(p_n - 20) = 0{,}9\,v_n$.
(v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = 1\,013 - 20 = 993$. Donc $v_n = 993 \times 0{,}9^n$ et

$$p_n = 20 + 993 \times 0{,}9^n.$$

3. Un plancher

Comme $993 \times 0{,}9^n > 0$, on a toujours $p_n > 20$: la pression ne descend jamais sous 20 hPa, l'objectif de 10 hPa est **impossible**. Comme $0{,}9^n$ tend vers 0, p_n tend vers 20 hPa.
Seuil de 25 hPa : $p_{50} \approx 25{,}1$ et $p_{51} \approx 24{,}6$, donc **51 cycles**. En Python :

```
p = 1013
n = 0
while p >= 25:
    p = 0.9*p + 2
    n = n + 1
print(n)
```

Pour aller plus loin

Avec $p_{n+1} = 0{,}9p_n + f$, la valeur « plancher » ℓ vérifie $\ell = 0{,}9\ell + f$, soit $\ell = 10f$. En posant $v_n = p_n - 10f$, on obtient comme ci-dessus $p_n = 10f + (1\,013 - 10f) \times 0{,}9^n$, qui tend vers $10f$ en restant au-dessus.
L'objectif $p_n < 10$ est atteint à partir d'un certain rang si et seulement si $10f < 10$, c'est-à-dire $f < 1$ hPa par cycle : la fuite doit être plus de deux fois plus faible.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Suite géométrique auxiliaire, expression du terme général.
- Limite d'une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1.
- Algorithme de seuil.