Variables aléatoires discrètes finies
Problème de recherche : l'extension de garantie

Un fabricant vend des onduleurs pour installations photovoltaïques. Ils sont garantis 2 ans. Il propose à ses clients une **extension de garantie** de 3 ans, au prix de 90 € : pendant ces 3 années supplémentaires, toutes les réparations sont gratuites pour le client.
Le service technique dispose des statistiques suivantes, sur les années 3 à 5 de fonctionnement d'un onduleur :

Nombre de pannes	0	1	2
Proportion d'onduleurs	80 %	15 %	5 %

Chaque réparation coûte 400 € (pièces et déplacement). On admet qu'il n'y a jamais plus de 2 pannes.

La mission

1. Pour un client qui ne prend pas l'extension, combien doit-il s'attendre à dépenser en moyenne en réparations sur les années 3 à 5 ? L'extension est-elle intéressante pour lui ?
2. Le fabricant gagne-t-il de l'argent, en moyenne, sur chaque extension vendue ?
3. Chaque contrat coûte en plus 10 € de frais de gestion au fabricant. À quel prix doit-il vendre l'extension pour gagner en moyenne 15 € par contrat ?

Pour aller plus loin

Un installateur a équipé 20 clients, qui ont tous pris l'extension. On admet que les pannes des onduleurs sont indépendantes. Quelle est la probabilité que plus de 6 de ces clients aient au moins une panne pendant les années 3 à 5 ? Combien de clients concernés peut-on attendre en moyenne ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Point de vue du client

Soit X le coût des réparations (en €) pour un client sans extension. X prend les valeurs 0, 400 et 800 :

x_i	0	400	800
$P(X = x_i)$	0,80	0,15	0,05

$E(X) = 0 \times 0{,}80 + 400 \times 0{,}15 + 800 \times 0{,}05 = 60 + 40 = 100$ €.

En moyenne, un client sans extension dépense 100 € ; l'extension coûte 90 €. **En moyenne, l'extension est (un peu) avantageuse pour le client**. Elle le protège surtout contre le risque d'une dépense de 800 €.

2. Point de vue du fabricant

Soit G le gain du fabricant sur une extension : $G = 90 - X$, donc $E(G) = 90 - E(X) = 90 - 100 = -10$ €. **Le fabricant perd en moyenne 10 € par contrat** : le prix est trop bas.

3. Le prix de l'extension

Pour un prix p : $G = p - 10 - X$, donc $E(G) = p - 10 - 100 = p - 110$. On veut $p - 110 = 15$, d'où $\boldsymbol{p = 125}$ €.

Pour aller plus loin

Un client a au moins une panne avec la probabilité $0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$. On répète 20 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « au moins une panne », de probabilité 0,2. Le nombre Y de clients concernés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20 ; 0{,}2)$.

À la calculatrice : $P(Y > 6) = 1 - P(Y \leqslant 6) \approx 1 - 0{,}913 = 0{,}087$. Il y a moins de 9 % de risque que plus de 6 clients soient concernés. En moyenne : $E(Y) = 20 \times 0{,}2 = 4$ clients.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Loi de probabilité et espérance d'une variable aléatoire ; interprétation comme moyenne.
- Schéma de Bernoulli et loi binomiale ; calculs à la calculatrice.