Variables aléatoires discrètes finies
Problème de recherche : combien de résistances commander ?

Un fabricant de cartes électroniques achète des résistances par sachets de 50. Le fournisseur annonce que 2 % des résistances sont défectueuses. On admet que l'état d'une résistance est indépendant de celui des autres. On note X le nombre de résistances défectueuses dans un sachet.

La mission

1. Quelle est la loi de X ? Combien de résistances défectueuses peut-on attendre en moyenne dans un sachet ?
2. Quelle est la probabilité qu'un sachet ne contienne aucune résistance défectueuse ? Qu'il en contienne au plus deux ?
3. Pour une petite série, le fabricant a besoin de 100 résistances qui fonctionnent. Il les commande à l'unité. Combien doit-il en commander, au minimum, pour avoir au moins 100 résistances qui fonctionnent avec une probabilité d'au moins 0,95 ?

Pour aller plus loin

Le fabricant commande deux sachets. Quelle est la probabilité que chacun des deux contienne au moins une résistance défectueuse ? Un stagiaire affirme que c'est la même chose que la probabilité qu'il y ait au moins deux résistances défectueuses sur les 100. Qu'en penser ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La loi de X

On répète 50 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (défectueuse avec la probabilité 0,02, ou non). X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50;0{,}02)$ et $E(X) = 50 \times 0{,}02 = 1$: une résistance défectueuse par sachet en moyenne.

2. Aucune, au plus deux

$P(X = 0) = 0{,}98^{50} \approx 0{,}364$.

$P(X \leqslant 2) = \binom{50}{0}0{,}98^{50} + \binom{50}{1}0{,}02 \times 0{,}98^{49} + \binom{50}{2}0{,}02^2 \times 0{,}98^{48} \approx 0{,}922$.

3. La commande

On commande n résistances; le nombre Y de résistances qui fonctionnent suit $\mathscr{B}(n;0{,}98)$. On cherche le plus petit n tel que $P(Y \geqslant 100) = 1 - P(Y \leqslant 99) \geqslant 0{,}95$.

n	100	101	102	103	104	105
$P(Y \geqslant 100)$	0,133	0,398	0,666	0,848	0,942	0,981

Il faut commander au moins **105 résistances**. Commander exactement 100 résistances ne réussit qu'une fois sur sept environ.

Pour aller plus loin

Pour un sachet, $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}98^{50} \approx 0{,}636$. Les sachets étant indépendants, la probabilité que chacun en contienne au moins une est $0{,}636^2 \approx 0{,}404$.

Sur 100 résistances, le nombre Z de défectueuses suit $\mathscr{B}(100;0{,}02)$ et $P(Z \geqslant 2) = 1 - 0{,}98^{100} - 100 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{99} \approx 0{,}597$. Le stagiaire a tort : avoir au moins deux défectueuses au total n'impose pas qu'elles soient dans des sachets différents (les deux peuvent être dans le même).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Schéma de Bernoulli et loi binomiale.
- Espérance d'une loi binomiale.
- Calcul de probabilités binomiales à la calculatrice ou au tableur.