Variables aléatoires discrètes finies
Problème de recherche : répéter pour ne pas se tromper

Une liaison radio entre un drone et sa base transmet des bits (0 ou 1). Chaque bit est mal reçu (inversé) avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres. Pour fiabiliser la liaison, on utilise un **code à répétition** : chaque bit est envoyé n fois de suite (n impair), et le récepteur retient le symbole majoritaire parmi les n copies reçues.

La mission

1. On choisit $n = 3$. Quelle est la probabilité que le récepteur se trompe sur un bit ?
2. Même question avec $n = 5$.
3. Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité d'erreur sur un bit est inférieure à 0,001 ? Quel est l'inconvénient de ce choix ?
4. Un octet (8 bits) est correctement reçu si ses 8 bits le sont. Comparer la probabilité qu'un octet soit correctement reçu sans code et avec le code $n = 3$.

Pour aller plus loin

Pourquoi choisit-on un nombre impair de répétitions ? Avec $n = 4$, que pourrait faire le récepteur en cas d'égalité, et quelle serait la probabilité d'égalité ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Trois copies

Le nombre X de copies fausses suit $\mathscr{B}(3;0{,}1)$. Le récepteur se trompe si $X \geqslant 2$:

$$P(X \geqslant 2) = \binom{3}{2} 0{,}1^2 \times 0{,}9 + \binom{3}{3} 0{,}1^3 = 0{,}027 + 0{,}001 = 0{,}028.$$

L'erreur passe de 10 % à 2,8 %.

2. Cinq copies

X suit $\mathscr{B}(5;0{,}1)$ et le récepteur se trompe si $X \geqslant 3$:

$$P(X \geqslant 3) = \binom{5}{3} 0{,}1^3 \times 0{,}9^2 + \binom{5}{4} 0{,}1^4 \times 0{,}9 + 0{,}1^5,$$

soit $P(X \geqslant 3) = 0{,}008\,1 + 0{,}000\,45 + 0{,}000\,01 = 0{,}008\,56$.

3. Erreur inférieure à 0,001

Pour n impair, l'erreur vaut $P\left(X \geqslant \frac{n+1}{2}\right)$ avec X de loi $\mathscr{B}(n;0{,}1)$. Au tableur :

n	3	5	7	9
erreur	0,028	0,008 56	0,002 73	0,000 89

Il faut $n = 9$. Inconvénient : on envoie 9 fois plus de données, donc le débit utile est divisé par 9.

4. Un octet

Sans code : $0{,}9^8 \approx 0{,}430$. Avec le code $n = 3$: $(1 - 0{,}028)^8 = 0{,}972^8 \approx 0{,}797$. La probabilité de recevoir un octet intact passe de 43 % à presque 80 %.

Pour aller plus loin

Avec un nombre impair de copies, il ne peut pas y avoir d'égalité : le vote donne toujours une réponse. Avec $n = 4$, en cas d'égalité (2 copies fausses sur 4), le récepteur peut demander la réexpédition du bit. Probabilité d'égalité : $\binom{4}{2} 0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 6 \times 0{,}008\,1 = 0{,}048\,6$. Les vrais systèmes utilisent des codes plus économiques (codes de Hamming, inventés en 1950), qui corrigent les erreurs sans tout répéter.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Loi binomiale, coefficients binomiaux.
- Calcul de $P(X \geqslant k)$.
- Indépendance et produit de probabilités.