Exponentielles
Problème de recherche : le meilleur placement

Une association dispose de 10 000 € de réserve qu'elle souhaite placer quelques années. Trois banques lui font une proposition, à intérêts composés :

- **banque A** : 3 % d'intérêts par an ;
- **banque B** : 0,25 % d'intérêts par mois ;
- **banque C** : 7,5 % d'intérêts tous les 30 mois.

Avec la banque A, le capital (en €) au bout de x années est $f(x) = 10\,000 \times 1{,}03^x$, pour tout réel $x \geqslant 0$.

La mission

1. Si la trésorière retire l'argent au bout de 6 mois, quelle somme obtient-elle avec la banque A ?
2. Quelle est la banque la plus avantageuse ? On pourra calculer le taux annuel équivalent de chaque banque.
3. Avec la banque A, au bout de combien de temps le capital aura-t-il doublé (à un mois près) ?

Pour aller plus loin

Entre 2015 et 2025, le prix d'un logiciel de comptabilité utilisé par l'association est passé de 200 € à 400 €. Quel a été le taux d'évolution annuel moyen de ce prix ? Le comparer aux taux des placements.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Retrait au bout de 6 mois

6 mois, c'est $x = 0{,}5$ an : $f(0{,}5) = 10\,000 \times 1{,}03^{0{,}5} \approx 10\,148{,}89$ €.

L'association récupère environ **10 148,89** €, soit environ 149 € d'intérêts (et non 150 €, la moitié des intérêts annuels : $1{,}03^{0{,}5} = \sqrt{1{,}03} \approx 1{,}0149$).

2. Comparer les trois banques

On calcule le coefficient multiplicateur sur 1 an pour chaque banque.

- Banque A : 1,03, soit 3 % par an.
- Banque B : 12 mois de suite à $\times 1{,}0025$: $1{,}0025^{12} \approx 1{,}0304$, soit environ 3,04 % par an.
- Banque C : 1 an $= \frac{12}{30} = 0{,}4$ période de 30 mois : $1{,}075^{0{,}4} \approx 1{,}0294$, soit environ 2,94 % par an.

La banque B est la plus avantageuse, de peu, devant A puis C (qui semble pourtant proposer le « gros » taux de 7,5 %).

3. Le doublement

On cherche x tel que $1{,}03^x = 2$. La fonction $x \mapsto 1{,}03^x$ est croissante ; au tableau de valeurs (avec un pas de $\frac{1}{12}$) : $1{,}03^{23{,}4} \approx 1{,}9971$ et $1{,}03^{23{,}5} \approx 2{,}0030$. Le capital double au bout d'environ **23 ans et 5 mois** ($23 + \frac{5}{12} \approx 23{,}42$ ans).

Pour aller plus loin

Le prix a été multiplié par 2 en 10 ans. Le taux annuel moyen t_m vérifie $(1+t_m)^{10} = 2$, donc $t_m = 2^{1/10} - 1 = 2^{0{,}1} - 1 \approx 0{,}0718$, soit environ **7,2 %** par an. C'est plus du double des taux des placements : l'argent placé « perd » du pouvoir d'achat par rapport à ce logiciel.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonctions $x \mapsto a^x$ pour x réel ; sens de variation.
- Évolutions successives ; taux d'évolution moyen $t_m = C^{1/n} - 1$.