Exponentielles
Problème de recherche : le médicament dans le sang

On injecte un médicament A à un patient. Juste après l'injection, la concentration du médicament dans le sang est de 20 mg/L. Le corps élimine ensuite 20 % du médicament présent chaque heure.
La concentration (en mg/L) au bout de x heures est $f(x) = 20 \times 0{,}8^x$, pour tout réel $x \geqslant 0$.

La mission

1. Une élève infirmière affirme : « Au bout d'une demi-heure, la concentration a baissé de 10 %, puisque c'est la moitié de 20 %. » A-t-elle raison ?
2. Pour un médicament B, la notice indique que la concentration baisse de 45 % toutes les 3 heures. Lequel des deux médicaments s'élimine le plus vite ? On pourra calculer le taux d'évolution horaire équivalent du médicament B.
3. La **demi-vie** d'un médicament est la durée au bout de laquelle sa concentration a diminué de moitié. Déterminer la demi-vie du médicament A, à la minute près.

Pour aller plus loin

Chez un autre patient, dont les reins fonctionnent mieux, la concentration du médicament A passe de 20 mg/L à 2,5 mg/L en 6 heures. Quel est le taux d'évolution horaire moyen de la concentration chez ce patient ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Au bout d'une demi-heure

Une demi-heure, c'est $x = 0{,}5$: $f(0{,}5) = 20 \times 0{,}8^{0{,}5} \approx 17{,}89$ mg/L.
Le coefficient multiplicateur est $0{,}8^{0{,}5} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}8944$, soit une baisse d'environ **10,6 %**, et non 10 % : **l'élève a tort**. Deux baisses successives de 10 % donneraient $0{,}9^2 = 0{,}81$, soit une baisse de 19 % en une heure, et non 20 %.

2. Comparer les deux médicaments

Pour le médicament B, 1 heure $= \frac{1}{3}$ de période de 3 heures. Le coefficient multiplicateur horaire est $0{,}55^{1/3} \approx 0{,}8193$, soit une baisse d'environ 18,1 % par heure.
Le médicament A baisse de 20 % par heure : **le médicament A s'élimine plus vite** que le médicament B (qui semblait pourtant avoir le « gros » taux de 45 %).

3. La demi-vie

On cherche x tel que $f(x) = 10$, c'est-à-dire $0{,}8^x = 0{,}5$. La fonction $x \mapsto 0{,}8^x$ est décroissante ; au tableau de valeurs : $0{,}8^{3{,}1} \approx 0{,}5007$ et $0{,}8^{3{,}11} \approx 0{,}4996$. La demi-vie est comprise entre 3,10 et 3,11 heures. Avec un pas d'une minute ($\frac{1}{60}$ h) : $0{,}8^{186/60} \approx 0{,}5007$ et $0{,}8^{187/60} \approx 0{,}4988$. La demi-vie du médicament A est d'environ **3 heures et 6 minutes** (la concentration passe sous 10 mg/L au cours de la 7^{e} minute).

Pour aller plus loin

La concentration a été multipliée par $\frac{2{,}5}{20} = 0{,}125$ en 6 heures. Le coefficient horaire moyen c vérifie $c^6 = 0{,}125$, donc $c = 0{,}125^{1/6} \approx 0{,}7071$: la concentration baisse en moyenne d'environ **29,3 %** par heure chez ce patient. Il élimine le médicament nettement plus vite : le médecin devra peut-être adapter la fréquence des doses.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonctions $x \mapsto a^x$ pour x réel ; sens de variation.
- Évolutions successives ; taux d'évolution moyen $t_m = C^{1/n} - 1$.