Fonction inverse
Problème de recherche : l'imprimante 3D de l'atelier

Une petite entreprise fabrique des supports de téléphone personnalisés avec une imprimante 3D louée 500 € par mois. Chaque support coûte en plus 2 € de matière et d'électricité. Le coût mensuel total (en €) pour q supports fabriqués dans le mois est donc $C(q) = 500 + 2q$.

Le **coût moyen** d'un support est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$, pour $q > 0$. Chaque support est vendu 6 €.

La mission

1. Combien de supports faut-il fabriquer (et vendre) chaque mois pour que le coût moyen d'un support soit inférieur à son prix de vente ?
2. Le gérant affirme : « Si on produit assez, le coût moyen d'un support finira par descendre en dessous de 1,50 €. » A-t-il raison ?
3. Un fournisseur propose une imprimante plus performante, louée 1 200 € par mois, avec un coût de seulement 0,80 € par support. À partir de quelle production mensuelle devient-elle plus intéressante que l'imprimante actuelle ?

Pour aller plus loin

Le gérant ne peut vendre que 100 supports par mois. À quel prix minimal doit-il les vendre pour ne pas perdre d'argent avec l'imprimante actuelle ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Coût moyen et prix de vente

$C_M(q) = \dfrac{500+2q}{q} = 2 + \dfrac{500}{q}$.

$C_M(q) < 6 \iff \dfrac{500}{q} < 4 \iff q > \dfrac{500}{4} = 125$ (on peut multiplier par $q > 0$).

Il faut fabriquer et vendre **au moins 126 supports** par mois.

2. Le coût moyen peut-il descendre sous 1,50 € ?

$C'_M(q) = -\dfrac{500}{q^2} < 0$: le coût moyen est décroissant. Mais $\dfrac{500}{q} > 0$, donc $C_M(q) > 2$ pour tout $q > 0$. Quand q devient très grand, $\dfrac{500}{q}$ se rapproche de 0 et $C_M(q)$ se rapproche de 2 : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe.

Le gérant a tort : le coût moyen reste toujours supérieur à 2 €, coût de la matière d'un support. Le loyer de 500 € se répartit sur de plus en plus de supports, mais la matière, elle, est payée pour chaque support.

3. Comparer les deux imprimantes

Nouvelle imprimante : $C_{M2}(q) = \dfrac{1\,200+0{,}8q}{q} = 0{,}8 + \dfrac{1\,200}{q}$.

$C_{M2}(q) < C_M(q) \iff 0{,}8 + \dfrac{1\,200}{q} < 2 + \dfrac{500}{q} \iff \dfrac{700}{q} < 1{,}2 \iff q > \dfrac{700}{1{,}2} \approx 583{,}3.$

La nouvelle imprimante est plus intéressante **à partir de 584 supports par mois**.

Pour aller plus loin

Pour ne pas perdre d'argent, le prix de vente doit être au moins égal au coût moyen : $C_M(100) = 2 + \dfrac{500}{100} = 7$ €. Il doit vendre ses supports **au moins 7 €**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$: dérivée, sens de variation.
- Comportement pour les grandes valeurs ; asymptote horizontale ; coût moyen.