Fonction inverse
Problème de recherche : l'automate du laboratoire

Un laboratoire de biologie médicale réalise des dosages de vitamine D avec un automate d'analyses loué 500 € par mois. Chaque dosage coûte en plus 2 € de réactifs et de consommables. Le coût mensuel total (en €) pour q dosages réalisés dans le mois est donc $C(q) = 500 + 2q$.

Le **coût moyen** d'un dosage est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$, pour $q > 0$. Chaque dosage rapporte 6 € au laboratoire (part remboursée par l'Assurance maladie et la mutuelle).

La mission

1. Combien de dosages faut-il réaliser chaque mois pour que le coût moyen d'un dosage soit inférieur à ce qu'il rapporte ?
2. La directrice affirme : « Si on réalise assez de dosages, le coût moyen d'un dosage finira par descendre en dessous de 1,50 €. » A-t-elle raison ?
3. Un fournisseur propose un automate plus performant, loué 1 200 € par mois, avec un coût de seulement 0,80 € par dosage. À partir de combien de dosages par mois devient-il plus intéressant que l'automate actuel ?

Pour aller plus loin

Un petit laboratoire de campagne, équipé du même automate que l'actuel, ne réalise que 100 dosages par mois. Combien chaque dosage devrait-il lui rapporter, au minimum, pour qu'il ne perde pas d'argent ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Coût moyen et recette

$C_M(q) = \dfrac{500+2q}{q} = 2 + \dfrac{500}{q}$.

$C_M(q) < 6 \iff \dfrac{500}{q} < 4 \iff q > \dfrac{500}{4} = 125$ (on peut multiplier par $q > 0$).

Il faut réaliser **au moins 126 dosages** par mois.

2. Le coût moyen peut-il descendre sous 1,50 € ?

$C'_M(q) = -\dfrac{500}{q^2} < 0$: le coût moyen est décroissant. Mais $\dfrac{500}{q} > 0$, donc $C_M(q) > 2$ pour tout $q > 0$. Quand q devient très grand, $\dfrac{500}{q}$ se rapproche de 0 et $C_M(q)$ se rapproche de 2 : la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe.

La directrice a tort : le coût moyen reste toujours supérieur à 2 €, coût des réactifs d'un dosage. Le loyer de 500 € se répartit sur de plus en plus de dosages, mais les réactifs, eux, sont payés pour chaque dosage.

3. Comparer les deux automates

Nouvel automate : $C_{M2}(q) = \dfrac{1\,200+0{,}8q}{q} = 0{,}8 + \dfrac{1\,200}{q}$.

$C_{M2}(q) < C_M(q) \iff 0{,}8 + \dfrac{1\,200}{q} < 2 + \dfrac{500}{q} \iff \dfrac{700}{q} < 1{,}2 \iff q > \dfrac{700}{1{,}2} \approx 583{,}3$.

Le nouvel automate est plus intéressant **à partir de 584 dosages par mois**.

Pour aller plus loin

Pour ne pas perdre d'argent, chaque dosage doit rapporter au moins le coût moyen : $C_M(100) = 2 + \dfrac{500}{100} = 7$ €. Il faudrait **au moins 7 € par dosage** : avec 6 €, ce petit laboratoire perd de l'argent sur cette analyse (il pourrait plutôt envoyer ses prélèvements à un plus gros laboratoire).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$: dérivée, sens de variation.
- Comportement pour les grandes valeurs ; asymptote horizontale ; coût moyen.