Logarithme décimal
Problème de recherche : la règle de 72

Les conseillers financiers utilisent souvent la **règle de 72** : « Un capital placé à intérêts composés au taux annuel de t % double en environ $\dfrac{72}{t}$ années. » Par exemple, à 6 % par an, un capital doublerait en environ $72 \div 6 = 12$ ans.

La mission

1. Un client place 5 000 € à 4 % par an. Au bout de combien d'années (entières) son capital aura-t-il doublé ? Comparer avec la règle de 72.
2. Tester la règle pour des taux de 1 %, de 10 % et de 24 %. Pour quels taux semble-t-elle fiable ?
3. Un client veut doubler son capital en exactement 10 ans. Quel taux annuel doit-il obtenir ? Comparer avec la valeur donnée par la règle de 72.

Pour aller plus loin

La règle de 72 fonctionne aussi pour l'inflation : si les prix augmentent de 2 % par an, en combien d'années perdent-ils la moitié de leur pouvoir d'achat ? Pourquoi les banquiers ont-ils choisi 72 plutôt que 70, qui donnerait souvent des résultats plus précis ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Placement à 4 %

Le capital au bout de n années est $5\,000 \times 1{,}04^n$. On cherche le plus petit entier n tel que $1{,}04^n \geqslant 2$:

$$1{,}04^n \geqslant 2 \iff n\log(1{,}04) \geqslant \log 2 \iff n \geqslant \frac{\log 2}{\log 1{,}04} \approx 17{,}67 \quad (\log 1{,}04 > 0).$$

Le capital double au bout de **18 ans**. La règle donne $72 \div 4 = 18$ ans : c'est exact.

2. Test de la règle

Durée exacte de doublement : $\dfrac{\log 2}{\log\left(1+\frac{t}{100}\right)}$.

Taux t	1 %	4 %	10 %	24 %
Durée exacte (années)	69,66	17,67	7,27	3,22
Règle de 72	72	18	7,2	3
Écart relatif	3 %	2 %	1 %	7 %

La règle est très fiable pour les taux usuels (environ de 2 % à 15 %), moins pour les taux très faibles ou très élevés. Elle reste une bonne approximation de calcul mental.

3. Doubler en 10 ans

On cherche $x = 1 + \frac{t}{100}$ tel que $x^{10} = 2$, donc $x = 2^{1/10} \approx 1{,}0718$: il faut un taux d'environ **7,18 %**. La règle de 72 donne $72 \div 10 = 7{,}2$ % : excellente approximation.

Pour aller plus loin

Avec une inflation de 2 % par an, les prix doublent en environ $72 \div 2 = 36$ ans (calcul exact : $\frac{\log 2}{\log 1{,}02} \approx 35$ ans) : une même somme permet alors d'acheter deux fois moins. 72 a beaucoup de diviseurs (2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24…) : les calculs mentaux sont simples, même si 70 ou 69 sont parfois plus précis.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Résoudre une inéquation $a^n \geqslant b$ avec le logarithme décimal.
- Résoudre une équation $x^a = b$ $(x > 0)$.