Logarithme décimal
Problème de recherche : le graphique en échelle logarithmique

Une entreprise de services informatiques a relevé son chiffre d'affaires annuel y (en milliers d'euros) tous les cinq ans depuis sa création. On note t le nombre d'années écoulées depuis 2005.

Année	2005	2010	2015	2020	2025
t_i	0	5	10	15	20
Chiffre d'affaires y_i (k€)	120	210	380	650	1 150

Dans son rapport annuel, l'entreprise présente ces données sur un graphique dont l'axe vertical est en **échelle logarithmique** : on y place en réalité les points de coordonnées $(t_i\,;z_i)$, avec $z_i = \log y_i$.

La mission

1. Le nuage de points $(t_i\,;y_i)$ justifie-t-il un ajustement affine ? Calculer les z_i (au millième) et représenter le nuage $(t_i\,;z_i)$. Que constate-t-on ?
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis au dix-millième).
3. En déduire un modèle de la forme $y = A \times q^t$. Quel est le taux d'évolution annuel moyen du chiffre d'affaires selon ce modèle ?
4. Si cette évolution se poursuit, en quelle année le chiffre d'affaires dépassera-t-il 3 millions d'euros ?

Pour aller plus loin

Sur un graphique en échelle logarithmique, que signifie le fait que deux graduations successives 10, 100, 1 000… soient régulièrement espacées ? Pourquoi est-ce utile pour représenter une croissance à taux constant ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les deux nuages

Le nuage $(t_i\,;y_i)$ n'est pas aligné : les écarts entre deux valeurs successives augmentent (+90, +170, +270, +500). Un ajustement affine n'est pas adapté.

t_i	0	5	10	15	20
$z_i = \log y_i$	2,079	2,322	2,580	2,813	3,061

Les écarts entre deux z_i successifs sont presque constants (environ 0,24 à 0,25) : les points $(t_i\,;z_i)$ sont presque alignés.

2. Ajustement de z en t

La calculatrice donne $z \approx 0{,}0491\,t + 2{,}0802$.

3. Le modèle exponentiel

$\log y = 0{,}0491\,t + 2{,}0802 \iff y = 10^{0{,}0491\,t+2{,}0802} = 10^{2{,}0802} \times \left(10^{0{,}0491}\right)^t$, donc

$$y \approx 120{,}3 \times 1{,}12^t.$$

Chaque année, le chiffre d'affaires est multiplié par environ 1,12 : le taux d'évolution annuel moyen est d'environ +12 %.

4. Le cap des 3 millions

3 millions d'euros, c'est $y = 3\,000$. On résout :

$$0{,}0491\,t + 2{,}0802 \geqslant \log 3\,000 \iff t \geqslant \frac{\log 3\,000 - 2{,}0802}{0{,}0491} \approx 28{,}5.$$

Selon ce modèle, le cap serait franchi au cours de l'année $2005 + 29 = 2034$ (sous réserve que la croissance se poursuive au même rythme).

Pour aller plus loin

Passer d'une graduation à la suivante revient à multiplier par 10 : sur l'axe, on lit des **rapports** et non des différences. Une croissance à taux constant multiplie la grandeur par le même nombre à intervalles réguliers : elle apparaît donc comme une droite, et sa pente renseigne directement sur le taux.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Logarithme décimal d'un nombre.
- Équivalence $\log y = z \iff y = 10^z$.
- Résolution d'une inéquation avec le logarithme.