Statistiques à deux variables
Problème de recherche : le budget publicitaire

Une chaîne de magasins de sport a testé différents budgets publicitaires mensuels dans plusieurs de ses magasins, de taille comparable. Elle a relevé le chiffre d'affaires mensuel obtenu :

Budget x (en centaines d'€)	0	1	4	9	16	25	36
Chiffre d'affaires y (en milliers d'€)	20	26,5	31,6	38,2	44,1	49,8	56,3

La mission

1. Un stagiaire réalise l'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Ce modèle est-il satisfaisant ?
2. Proposer un meilleur modèle à l'aide du changement de variable $z = \sqrt{x}$.
3. Le directeur veut atteindre un chiffre d'affaires mensuel de 80 000 € dans un magasin. Quel budget publicitaire faut-il prévoir selon chacun des deux modèles ? Lequel est le plus crédible ?

Pour aller plus loin

Selon le meilleur modèle, de combien augmente le chiffre d'affaires quand on passe d'un budget de 900 € à 1 600 € ? Puis de 1 600 € à 2 500 € ? Que peut-on en conclure sur l'efficacité de la publicité ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. L'ajustement affine

À la calculatrice : $y \approx 0{,}925x + 26{,}05$. Écarts entre les valeurs observées et les valeurs du modèle (arrondis) :

x	0	1	4	9	16	25	36
$y - (0{,}925x + 26{,}05)$	$-6{,}1$	$-0{,}5$	$+1{,}8$	$+3{,}8$	$+3{,}3$	$+0{,}6$	$-3{,}0$

Les écarts sont importants (jusqu'à 6 000 €) et suivent une tendance (négatifs, puis positifs, puis négatifs) : le nuage est **courbé**, le modèle affine n'est pas satisfaisant.

2. Le changement de variable

Avec $z = \sqrt{x}$: z prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Le nuage $(z\,;y)$ est presque aligné (les valeurs de y augmentent d'environ 6 à chaque fois). Ajustement : $y \approx 6z + 20{,}07$, soit $\boldsymbol{y \approx 6\sqrt{x} + 20{,}07}$. Les écarts sont alors tous inférieurs à 0,5 (500 €).

3. Objectif 80 000 €

Modèle affine : $0{,}925x + 26{,}05 = 80 \iff x \approx 58{,}3$, soit un budget d'environ 5 800 €.
Modèle en $\sqrt{x}$: $6\sqrt{x} + 20{,}07 = 80 \iff \sqrt{x} \approx 9{,}99 \iff x \approx 99{,}8$, soit un budget d'environ **10 000** €.
Le second modèle est le plus crédible, car il s'ajuste beaucoup mieux aux données. Prudence toutefois : $x = 100$ est loin des budgets testés (36 au maximum), l'extrapolation est risquée.

Pour aller plus loin

De 900 € à 1 600 € (+700 €) : $\sqrt{x}$ passe de 3 à 4, le chiffre d'affaires gagne environ 6 000 €. De 1 600 € à 2 500 € (+900 €) : $\sqrt{x}$ passe de 4 à 5, on gagne encore environ 6 000 €. Chaque nouvelle centaine d'euros rapporte de moins en moins : les **rendements sont décroissants**. Remarque : une corrélation ne prouve pas que la publicité est la seule cause des ventes.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Ajustement affine par la méthode des moindres carrés ; interpolation et extrapolation.
- Changement de variable pour se ramener à un nuage presque aligné.