Suites arithmétiques
Problème de recherche : le choix du contrat

Léa, titulaire d'un BTS, reçoit deux propositions d'embauche pour un poste de gestionnaire de paie :

- **entreprise A** : salaire annuel de 24 000 € la première année, puis augmentation de 600 € chaque année ;
- **entreprise B** : salaire annuel de 22 000 € la première année, puis augmentation de 1 000 € chaque année.

On note a_n et b_n les salaires annuels (en €) de la n-ième année dans chaque entreprise : $a_1 = 24\,000$ et $b_1 = 22\,000$.

La mission

1. À partir de quelle année le salaire annuel proposé par B dépasse-t-il celui proposé par A ?
2. Léa pense rester plusieurs années dans l'entreprise choisie. Combien d'années doit-elle y rester, au minimum, pour que B lui ait rapporté **au total** plus que A ?
3. Une entreprise C propose 23 000 € la première année, avec une augmentation annuelle fixe. Quelle augmentation annuelle minimale C doit-elle proposer pour rapporter au total au moins autant que A sur 10 ans ?

Pour aller plus loin

Montrer que, sur 10 ans, le salaire annuel moyen dans l'entreprise A est la moyenne du premier et du dernier salaire. Pourquoi est-ce vrai pour toute suite arithmétique ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modélisation

Chaque année, le salaire augmente d'un même montant : les suites sont arithmétiques, de raisons 600 et 1 000. Donc $a_n = 24\,000 + 600(n-1)$ et $b_n = 22\,000 + 1\,000(n-1)$.

1. Le salaire annuel

$b_n > a_n \iff 22\,000 + 1\,000(n-1) > 24\,000 + 600(n-1) \iff 400(n-1) > 2\,000 \iff n-1 > 5 \iff n > 6$.

Le salaire de B dépasse celui de A **à partir de la 7e année**. Vérification : $a_6 = b_6 = 27\,000$, puis $a_7 = 27\,600 < b_7 = 28\,000$.

2. Le total des salaires

Somme des N premiers termes d'une suite arithmétique : $N \times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.

$$S_A = N \times \frac{24\,000 + 24\,000 + 600(N-1)}{2} = 24\,000N + 300N(N-1)$$

et de même $S_B = 22\,000N + 500N(N-1)$. $S_B > S_A \iff 200N(N-1) > 2\,000N \iff N-1 > 10 \iff N > 11$ (on peut diviser par $200N > 0$).

Il faut rester **au moins 12 ans**. Vérification : sur 11 ans, $S_A = S_B = 297\,000$ €; sur 12 ans, $S_A = 327\,600$ € et $S_B = 330\,000$ €.

3. L'entreprise C

Sur 10 ans : $S_A = 24\,000 \times 10 + 300 \times 10 \times 9 = 267\,000$ €. Avec une augmentation r : $c_n = 23\,000 + r(n-1)$ et $S_C = 10 \times \dfrac{23\,000 + 23\,000 + 9r}{2} = 230\,000 + 45r$. $230\,000 + 45r \geqslant 267\,000 \iff r \geqslant \dfrac{37\,000}{45} \approx 822{,}2$. C doit proposer **au moins 823 €** d'augmentation par an.

Pour aller plus loin

Sur 10 ans, $S_A = 267\,000$ €, soit en moyenne 26 700 € par an; or $\dfrac{a_1 + a_{10}}{2} = \dfrac{24\,000 + 29\,400}{2} = 26\,700$. C'est vrai pour toute suite arithmétique : la moyenne vaut $\dfrac{S}{N} = \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$ d'après la formule de la somme. Les termes sont « symétriques » autour de cette moyenne ($a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = \ldots$).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Reconnaître et exprimer une suite arithmétique; résoudre une inéquation.
- Somme des termes et moyenne arithmétique.