Suites arithmétiques
Problème de recherche : les gradins de la salle de concert

Une société de spectacles fait construire une salle de concert équipée de gradins. Le premier rang, au pied de la scène, compte 20 places, et chaque rang compte 2 places de plus que le rang précédent.
On note p_n le nombre de places du n-ième rang : $p_1 = 20$.

La mission

1. Exprimer p_n en fonction de n. Combien de places compte le 15e rang ?
2. L'architecte propose une salle de 25 rangs. Quelle est sa capacité totale ?
3. La société voudrait pouvoir accueillir au moins 1 500 spectateurs. Combien de rangs faut-il prévoir au minimum ?

Pour aller plus loin

Finalement, la salle compte 25 rangs. Les places des rangs 1 à 10 sont vendues 50 €, celles des rangs suivants 35 €. Quelle est la recette d'un concert à guichets fermés ? Quel prix unique aurait donné la même recette ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le terme général

La suite (p_n) est arithmétique de premier terme $p_1 = 20$ et de raison 2 : $p_n = 20 + 2(n-1) = 18 + 2n$.

Le 15e rang compte $p_{15} = 18 + 30 = 48$ places.

2. La salle de 25 rangs

$p_{25} = 68$. La capacité est la somme des 25 premiers termes :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{25} = 25 \times \frac{20 + 68}{2} = 1\,100 \text{ places.}$$

3. Au moins 1 500 places

Avec n rangs, la capacité est $n \times \dfrac{20 + (18 + 2n)}{2} = n(19 + n) = n^2 + 19n$.

Nombre de rangs n	28	29	30	31
Capacité	1 316	1 392	1 470	1 550

Il faut au minimum 31 rangs.

Une boucle en Python donne le même résultat :

```
n = 0
places = 0
while places < 1500:
    n = n + 1
    places = places + 18 + 2*n
print(n, places)
```

Pour aller plus loin

Rangs 1 à 10 : $10 \times \frac{20+38}{2} = 290$ places, soit $290 \times 50 = 14\,500$ €.

Rangs 11 à 25 (15 rangs, de 40 à 68 places) : $15 \times \frac{40+68}{2} = 810$ places, soit $810 \times 35 = 28\,350$ €.

Recette totale : 42 850 €. Un prix unique de $\frac{42\,850}{1\,100} \approx 38{,}95$ € aurait donné la même recette.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Terme général d'une suite arithmétique.
- Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- Recherche d'un seuil (tableau de valeurs ou boucle Python).