Suites géométriques
Problème de recherche : la start-up qui décolle

Une jeune entreprise lance une application de gestion de budget, vendue par abonnement à 10 € par mois. Au lancement, elle compte 2 000 abonnés. Le nombre d'abonnés augmente ensuite de 8 % chaque mois.
On note u_n le nombre d'abonnés n mois après le lancement : $u_0 = 2\,000$.

La mission

1. Le fondateur annonce aux investisseurs : « +8 % par mois, cela fait +96 % par an. » A-t-il raison ?
2. Le serveur actuel supporte au maximum 10 000 abonnés. Au bout de combien de mois faudra-t-il en changer ?
3. L'objectif de chiffre d'affaires pour les 12 premiers mois (du mois 0 au mois 11) est de 400 000 €. Sera-t-il atteint ?

Pour aller plus loin

Une application concurrente compte 3 000 abonnés au même moment, et en gagne 350 de plus chaque mois. À partir de quel mois la start-up aura-t-elle plus d'abonnés que sa concurrente ? Quel taux d'augmentation mensuel faudrait-il à la start-up pour tripler son nombre d'abonnés en un an ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modélisation

Augmenter de 8 %, c'est multiplier par 1,08 : (u_n) est géométrique de raison 1,08, donc $u_n = 2\,000 \times 1{,}08^n$.

1. L'évolution sur un an

Douze évolutions successives de +8 % : le coefficient multiplicateur global est $1{,}08^{12} \approx 2{,}518$, soit une hausse d'environ **152 %** (et non 96 %). Le fondateur a tort, et il se sous-estime : les pourcentages successifs ne s'additionnent pas, chaque hausse s'appliquant à un nombre d'abonnés déjà augmenté.

2. Le changement de serveur

Au tableau de valeurs : $u_{20} \approx 9\,322$ et $u_{21} \approx 10\,068$. Le serveur sera saturé au bout de **21 mois**.

3. Le chiffre d'affaires

Nombre total d'« abonnements-mois » sur les 12 premiers mois (somme de 12 termes d'une suite géométrique) :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{11} = \frac{u_{12} - u_0}{q - 1} = \frac{2\,000 \times 1{,}08^{12} - 2\,000}{1{,}08 - 1} \approx 37\,954.$$

Chiffre d'affaires : environ $37\,954 \times 10 \approx 379\,500$ €. **L'objectif n'est pas atteint** (il manque environ 20 000 €).

Pour aller plus loin

Concurrente : $v_n = 3\,000 + 350n$ (suite arithmétique). Au tableau de valeurs, $u_n > v_n$ pour la première fois pour $n = 22$ ($u_{22} \approx 10\,873$ et $v_{22} = 10\,700$) : c'est-à-dire au bout de 22 mois. La croissance géométrique finit toujours par dépasser une croissance arithmétique.

Tripler en 12 mois : il faut un coefficient mensuel c tel que $c^{12} = 3$, c'est la moyenne géométrique des coefficients : $c = 3^{1/12} \approx 1{,}0959$, soit environ **+9,6 %** par mois. On peut aussi le trouver par essais à la calculatrice.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Suite géométrique ; évolutions successives et coefficient multiplicateur global.
- Somme des termes d'une suite géométrique ; moyenne géométrique.