Suites géométriques
Problème de recherche : l'épidémie de grippe

Au début d'une épidémie de grippe, on recense 2 000 nouveaux cas dans une région le jour où l'ARS lance sa surveillance (jour 0). Les épidémiologistes estiment que le nombre de nouveaux cas quotidiens augmente ensuite de 8 % chaque jour, tant qu'aucune mesure n'est prise.
On note u_n le nombre de nouveaux cas le jour n : $u_0 = 2\,000$.

La mission

1. Un journaliste annonce : « +8 % par jour, cela fait +56 % par semaine. » A-t-il raison ?
2. Les hôpitaux de la région déclenchent leur « plan blanc » (rappel du personnel, déprogrammation d'opérations) dès que le nombre de nouveaux cas quotidiens dépasse 10 000. Au bout de combien de jours cela arrivera-t-il ?
3. L'ARS a distribué 40 000 tests rapides aux médecins de la région pour les 12 premiers jours (du jour 0 au jour 11), à raison d'un test par nouveau cas. Ce stock sera-t-il suffisant ?

Pour aller plus loin

Dans une région voisine, on compte 3 000 nouveaux cas le jour 0, puis 350 de plus chaque jour. À partir de quel jour la première région aura-t-elle plus de nouveaux cas quotidiens que sa voisine ? Quel taux d'augmentation quotidien ferait tripler le nombre de nouveaux cas quotidiens en 12 jours ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modélisation

Augmenter de 8 %, c'est multiplier par 1,08 : (u_n) est géométrique de raison 1,08, donc $u_n = 2\,000 \times 1{,}08^n$.

1. L'évolution sur une semaine

Sept évolutions successives de +8 % : le coefficient multiplicateur global est $1{,}08^7 \approx 1{,}714$, soit une hausse d'environ **71 %** (et non 56 %). Le journaliste a tort, et il sous-estime l'épidémie : les pourcentages successifs ne s'additionnent pas, chaque hausse s'appliquant à un nombre de cas déjà augmenté.

2. Le plan blanc

Au tableau de valeurs : $u_{20} \approx 9\,322$ et $u_{21} \approx 10\,068$. Le plan blanc sera déclenché au bout de **21 jours**.

3. Le stock de tests

Nombre total de nouveaux cas sur les 12 premiers jours (somme de 12 termes d'une suite géométrique) :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{11} = \frac{u_{12} - u_0}{q - 1} = \frac{2\,000 \times 1{,}08^{12} - 2\,000}{1{,}08 - 1} \approx 37\,954.$$

Il faut environ 37 954 tests : **le stock de** 40 000 **tests suffit**, mais de justesse (il en restera environ 2 000, soit à peine les cas d'une journée de début d'épidémie).

Pour aller plus loin

Région voisine : $v_n = 3\,000 + 350n$ (suite arithmétique). Au tableau de valeurs, $u_n > v_n$ pour la première fois pour $n = 22$ ($u_{22} \approx 10\,873$ et $v_{22} = 10\,700$) : c'est-à-dire le jour 22. Une croissance géométrique finit toujours par dépasser une croissance arithmétique.

Tripler en 12 jours : il faut un coefficient quotidien c tel que $c^{12} = 3$, c'est la moyenne géométrique des coefficients : $c = 3^{1/12} \approx 1{,}0959$, soit environ **+9,6 %** par jour. On peut aussi le trouver par essais à la calculatrice.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Suite géométrique ; évolutions successives et coefficient multiplicateur global.

— Somme des termes d'une suite géométrique ; moyenne géométrique.