Variables aléatoires
Problème de recherche : les croissants du boulanger

Un boulanger prépare chaque matin des croissants. Chaque croissant lui coûte 0,40 € à fabriquer et il le vend 1,20 €. Les croissants non vendus le soir sont perdus. Il a relevé, sur plusieurs mois, le nombre de croissants demandés par ses clients chaque matin :

Nombre de croissants demandés	20	30	40	50
Fréquence	10 %	30 %	40 %	20 %

On assimile ces fréquences à des probabilités. Le boulanger hésite à préparer 20, 30, 40 ou 50 croissants chaque matin.

La mission

1. Le boulanger se dit : « En moyenne, on me demande 37 croissants : j'en prépare donc 37. » Vérifier que la demande moyenne vaut bien 37. Ce raisonnement est-il suffisant ?
2. Combien de croissants doit-il préparer (parmi 20, 30, 40 ou 50) pour que son bénéfice moyen soit le plus grand possible ?
3. Une association rachète désormais au boulanger ses croissants invendus, 0,30 € pièce. Sa décision change-t-elle ?

Pour aller plus loin

On admet que la demande, d'un jour à l'autre, est indépendante, et qu'elle est d'au moins 40 croissants avec la probabilité 0,6. Sur une période de 20 jours, quelle est la probabilité que la demande atteigne au moins 40 croissants pendant au moins 15 jours ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La demande moyenne

Soit D la demande : $E(D) = 20\times0{,}1+30\times0{,}3+40\times0{,}4+50\times0{,}2 = 2+9+16+10 = 37$. La demande moyenne est bien 37, mais ce raisonnement ne tient pas compte des coûts : un croissant non vendu fait perdre 0,40 €, alors qu'une vente manquée fait perdre 0,80 € de bénéfice. Il faut calculer le bénéfice moyen pour chaque choix.

2. Le bénéfice moyen

S'il prépare n croissants, il en vend le plus petit des deux nombres n et D. Son bénéfice est $B_n = 1{,}2\times$ (nombre vendu) $- 0{,}4n$. Exemple pour $n = 40$: il vend 20, 30, 40 ou 40 croissants, avec les probabilités 0,1 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,2. Ventes moyennes : $20\times0{,}1+30\times0{,}3+40\times0{,}6 = 35$, donc $E(B_{40}) = 1{,}2\times35-16 = 26$ €.

Croissants préparés n	20	30	40	50
Ventes moyennes	20	29	35	37
Bénéfice moyen (€)	16	22,80	**26**	24,40

Il doit préparer **40 croissants** (bénéfice moyen de 26 € par matin).

3. Avec le rachat des invendus

Nombre moyen d'invendus : $n-$ ventes moyennes, soit 0 ; 1 ; 5 ; 13. On ajoute 0,30 € par invendu : bénéfices moyens de 16 ; 23,10 ; 27,50 et **28,30** €. **La décision change** : il vaut mieux préparer 50 croissants, car les invendus coûtent désormais seulement 0,10 €.

Pour aller plus loin

Le nombre Y de jours où la demande atteint au moins 40 suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;0{,}6)$ (20 épreuves de Bernoulli indépendantes, de succès de probabilité 0,6). À la calculatrice : $P(Y\geqslant15) = 1-P(Y\leqslant14)\approx0{,}126$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Loi de probabilité d'une variable aléatoire ; espérance et interprétation comme moyenne.
- Schéma de Bernoulli et loi binomiale.