Variables aléatoires
Problème de recherche : le plan de contrôle des lots

Une centrale d'achat reçoit des lots de milliers de connecteurs électriques. Elle ne peut pas tous les tester. Son plan de contrôle actuel est le suivant : on prélève 20 connecteurs au hasard dans le lot ; si au plus 1 connecteur est défectueux, le lot est accepté, sinon il est renvoyé au fabricant.
On note p la proportion de connecteurs défectueux dans un lot et X le nombre de connecteurs défectueux parmi les 20 prélevés. Le lot étant très grand, on assimile les prélèvements à des tirages avec remise.

La mission

1. Quelle est la loi de X ?
2. Un « bon » lot contient 5 % de connecteurs défectueux, un « mauvais » lot en contient 15 %. Quelle est la probabilité d'accepter un bon lot ? un mauvais lot ? Ce plan de contrôle est-il satisfaisant ?
3. Le fabricant exige qu'un bon lot soit accepté avec une probabilité d'au moins 0,9. Toujours avec 20 connecteurs prélevés, combien de connecteurs défectueux faut-il tolérer, au minimum ? Qu'en est-il alors pour un mauvais lot ?

Pour aller plus loin

La centrale veut aussi qu'un mauvais lot soit accepté avec une probabilité d'au plus 0,1. Proposer un plan de contrôle (nombre n de connecteurs prélevés, nombre k de défectueux tolérés) qui satisfait les deux exigences, avec n le plus petit possible.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Loi de X

On répète 20 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli dont le succès « le connecteur est défectueux » a la probabilité p. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;p)$.

2. Bons et mauvais lots

On accepte le lot si $X \leqslant 1$: $P(X \leqslant 1) = (1-p)^{20} + 20\,p\,(1-p)^{19}$.

Bon lot ($p = 0{,}05$) : $P(X \leqslant 1) \approx 0{,}358 + 0{,}377 \approx 0{,}736$. Mauvais lot ($p = 0{,}15$) : $P(X \leqslant 1) \approx 0{,}039 + 0{,}137 \approx 0{,}176$.

Ce plan n'est pas satisfaisant pour le fabricant : plus d'un bon lot sur quatre est renvoyé. Il rejette en revanche la plupart des mauvais lots.

3. Tolérer plus de défectueux

Avec $p = 0{,}05$: $P(X \leqslant 1) \approx 0{,}736$, $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}925$. Il faut tolérer au moins 2 connecteurs défectueux.

Mais pour un mauvais lot ($p = 0{,}15$), $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}405$: environ 4 mauvais lots sur 10 sont alors acceptés. Avec seulement 20 connecteurs prélevés, on ne peut pas satisfaire à la fois le fabricant et la centrale.

Pour aller plus loin

On cherche n et k tels que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$ pour $p = 0{,}05$ et $P(X \leqslant k) \leqslant 0{,}1$ pour $p = 0{,}15$. Pour chaque n, on prend le plus petit k qui satisfait le fabricant, puis on vérifie l'exigence de la centrale ($F(k,n,p)$ calcule $P(X \leqslant k)$) :

```
from math import comb
def F(k, n, p):
    return sum(comb(n, i) * p**i * (1-p)**(n-i) for i in range(k+1))
n = 20
while True:
    k = 0
    while F(k, n, 0.05) < 0.9:
        k = k + 1
    if F(k, n, 0.15) <= 0.1:
        break
    n = n + 1
print(n, k)
```

On obtient $n = 60$ et $k = 5$: $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}921$ pour un bon lot et $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}097$ pour un mauvais lot. Il faut prélever 60 connecteurs et tolérer au plus 5 défectueux.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Reconnaître une loi binomiale.
- Calculer des probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$.
- Utiliser une loi binomiale pour prendre une décision.